السؤال الأول (٤٠ درجة):

(i) مراتب المصفوفات موضحة في أدلة هذه المصفوفات $\left(A\cdot B\right)_{3\times4}\ ,\ \left(B\cdot D\right)_{4\times3}\ ,\ \left(A\cdot D\right)_{3\times3}\ ,\ \left(C\cdot B\right)_{5\times4}\ ,\ \left[D\cdot\left(A\cdot B\right)\right]_{4\times4}$	١٥ درجة
(ii) جداء المصفوفات هو كالآتي $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\3&1&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0-1+2&0+1+0+1\\3+0+2+2&6-1+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\7&6\end{pmatrix}$ $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\3&1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+6&-1+2&1-4&1+2\\0-3&0-1&0+2&0-1\\0+0&1+0&-1+0&-1+0\\0+3&-2+1&2-2&2+1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}6&1&-3&3\\-3&-1&2&-1\\0&1&-1&-1\\3&-1&0&3\end{pmatrix}$	١٥ درجة
(iii) لدينا بالفرض أن $A^T=A$ و $B^T=B$، وبالتالي **لزوم الشرط:** إذا كانت $A\cdot B$ متناظرة، فإن $\left(A\cdot B\right)^T=A\cdot B\ \Rightarrow\ B^T\cdot A^T=A\cdot B\ \Rightarrow\ B\cdot A=A\cdot B$ **كفاية الشرط:** إذا كانت $B\cdot A=A\cdot B$، فإن $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T=B\cdot A=A\cdot B$ وهذا يعني أن المصفوفة $A\cdot B$ مصفوفة متناظرة.	١٠ درجات

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

١٥ درجة	(i) لدينا $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow$ $A^+=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $A^+=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ فنلاحظ أن المصفوفة A^+ هي مصفوفة متناظرة وأن المصفوفة A^- هي مصفوفة متناظرة عكسياً، وأن $A^+ + A^- = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=A$
٣ درجات	(ii) حساب المحددات $D_1=\left\|(-2)\right\|=-2$
٥ درجات	$D_2=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=(3)(1)-(-1)(3)=6$
٧ درجات	$D_3=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0\end{vmatrix}$ $=\left[(3)(2)(2)+(1)(5)(3)+(-1)(0)(0)\right]-\left[(-1)(2)(3)+(3)(5)(0)+(1)(0)(1)\right]$ $=\left[12+15+0\right]-\left[-6+0+0\right]=27+6=33$

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

نشكل أولاً مصفوفة الأمثال لجملة المعادلات، كما يلي $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&-1&5\\3&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\overline{A}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1&5\\-1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&5\\3&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&-1\\3&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&3\\3&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&3\\-1&5\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\-1&5\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\-1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&14&4\\-2&-11&5\\8&-13&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$ $Adj\,(A)=\left(\overline{A}\right)^{T}=\begin{pmatrix}6&-2&8\\14&-11&-13\\4&5&-1\end{pmatrix}$ كما أن $\lvert A\rvert=(2)(6)+(1)(14)+(3)(4)=12+14+12=38$ ويصبح مقلوب مصفوفة الأمثال بالشكل $A^{-1}=\frac{1}{\lvert A\rvert}\,Adj\,(A)=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}6&-2&8\\14&-11&-13\\4&5&-1\end{pmatrix}$	٢٠ درجة
ولحل جملة المعادلات نكتبها بالشكل المصفوفي $A\cdot X=B$، حيث أن $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&-1&5\\3&-1&-1\end{pmatrix}\ ,\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$ فيكون حل جملة المعادلات بالشكل $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}6&-2&8\\14&-11&-13\\4&5&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$ $=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}(6)(5)+(-2)(4)+(8)(2)\\(14)(5)+(-11)(4)+(-13)(2)\\(4)(5)+(5)(4)+(-1)(2)\end{pmatrix}=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}30-8+16\\70-44-26\\20+20-2\end{pmatrix}=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}38\\0\\38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	١٠ درجات

انتهى سلم التصحيح (ثلاث صفحات)